

Mecklenburg-Vorpommern



Dieses Dokument kann strukturelle Abweichungen vom derzeit gültigen Abitur aufweisen. Dennoch können Inhalte und Kompetenzen dieser Aufgaben einen wertvollen Beitrag in der Prüfungsvorbereitung leisten.

Musterabitur aus dem Jahr 2022

Mathematik (WTR)

Grundkurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

Hinweise für Schülerinnen und Schüler

Aufgabenwahl: Der Prüfungsteil B beinhaltet vier Pflichtaufgaben. Dabei sind in den zwei Aufgaben zur Analysis 10 und 35 Bewertungseinheiten erreichbar, in den zwei Aufgaben zur Geometrie sind es 10 und 20.

Bearbeitungszeit: Allen Prüfungsteilnehmern steht eine Bearbeitungszeit von 225 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Nach Abgabe des Prüfungsteils A nutzt der Prüfling den verbleibenden Zeitraum für die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B.

Hilfsmittel: Für die Bearbeitung der Aufgaben des Teils B sind zugelassen:

- ein an der Schule eingeführtes Tafelwerk,
- ein an der Schule zugelassener wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR), der nicht programmierbar und nicht graphikfähig ist und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differentiation oder Integration oder des automatischen Lösen von Gleichungen verfügt,
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung.

Schülerinnen und Schüler, deren Muttersprache nicht die deutsche Sprache ist, können als zusätzliches Hilfsmittel ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter Form verwenden. Näheres regelt die Schule.

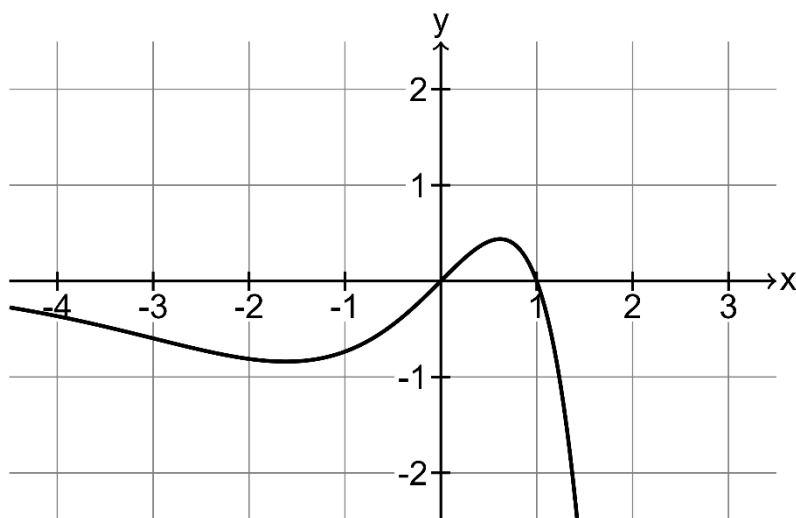
Sonstiges: Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

1 Analysis

Die Abbildung 1 zeigt den Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (-x^2 + x) \cdot e^x$ und $x \in \mathbb{R}$.



Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = -e^x \cdot (x^2 + x - 1)$.

- 1.1 Geben Sie die Nullstellen von f an und berechnen Sie die Extremstellen von f . 3 BE

- 1.2 An den Graphen von f wird im Punkt $P(1|f(1))$ die Tangente t gelegt. Ermitteln Sie eine Gleichung von t . 2 BE

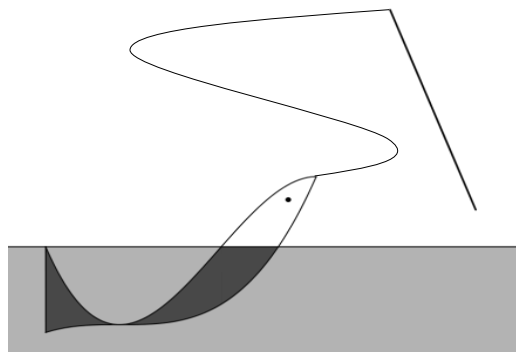
- 1.3 Begründen Sie ohne zu rechnen, dass es eine negative Zahl a gibt, für die gilt: 3 BE

$$\int_a^1 f(x) dx = 0$$

- 1.4 Begründen Sie, dass der Graph jeder Stammfunktion von f einen Tiefpunkt hat. 2 BE

2 Analysis

Die Abbildung zeigt das Logo eines Geschäfts für Anglerbedarf. Die obere Spitze der Schwanzflosse des Fische liegt auf der Wasseroberfläche; die Strecke zwischen oberer und unterer Spitze der Schwanzflosse steht senkrecht zur Wasseroberfläche.



Bei Verwendung eines geeigneten Koordinatensystems kann die untere

Begrenzungsline des Fische mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion $u(x) = \frac{1}{8}x^3$, die obere

Begrenzungsline mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion $v(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot (4 - x)$ beschrieben und

die Wasseroberfläche durch die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{5}{4}$ dargestellt werden.

2.1 Zeigen Sie, dass

5 BE

- die Graphen von u und v nur die Punkte $P(0|0)$ und $Q\left(\frac{8}{3}|\frac{64}{27}\right)$ gemeinsam haben;
- $v'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion von v ist.

2.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt Q ein Extrempunkt des Graphen von v ist, und geben Sie die Art dieses Extrempunkts an.

3 BE

2.3 Beurteilen Sie die folgende Aussage:

3 BE

Für jeden Wert von $x \in \left]0; \frac{8}{3}\right[$ ist die Steigung des Graphen von v größer als die Steigung des Graphen von u .

2.4 Die Ausdehnung des Fische in y -Richtung beträgt $\frac{539}{216}$. Ermitteln Sie damit die Ausdehnung des Fische in x -Richtung.

5 BE

(zur Kontrolle: Die Ausdehnung in x -Richtung beträgt $\frac{11}{3}$.)

2.5 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schwanzflosse des Fische.

3 BE

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

- 2.6 Bezeichnet man die Lösung der Gleichung $v(x) = \frac{5}{4}$ für $0 < x \leq \frac{8}{3}$ mit x_1 und die Lösung der Gleichung $u(x) = \frac{5}{4}$ mit x_2 , so ist der Wert des Terms

$$\int_{-1}^{x_1} (v(x) - u(x)) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{5}{4} - u(x) \right) dx$$

die Lösung einer Aufgabe im vorliegenden Sachzusammenhang.

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und beschreiben Sie die Bedeutung der beiden Integrale im Zusammenhang mit der Aufgabe.

- 2.7 Das Logo des Geschäfts soll verändert werden. Für die obere Begrenzungslinie des Fisches wird weiterhin die Funktion v verwendet. Die untere Begrenzungslinie jedoch soll anstelle von u mithilfe einer anderen der in \mathbb{R} definierten Funktionen $u_k(x) = \frac{1}{8} k \cdot x^3$ mit $k > 0$ beschrieben werden. Der gemeinsame Punkt der Graphen von u_k und v , der die x -Koordinate $\frac{8}{k+2}$ hat, stellt die Kopfspitze dar.

- 2.7.1 Weisen Sie nach, dass die x -Achse für alle Werte von k Tangente an den Graphen von u_k in dessen Wendepunkt ist. 3 BE
- 2.7.2 Bestimmen Sie, wie der Wert von k gewählt werden müsste, damit die Ausdehnung der Schwanzflosse in y -Richtung $\frac{3}{2}$ beträgt. 4 BE
- 2.7.3 Die Graphen von u_k und v schließen mit der Strecke zwischen oberer und unterer Spitze der Schwanzflosse jeweils einen Winkel ein. Für einen Wert von k sind die beiden Winkel gleich groß. 4 BE
- Prüfen Sie, ob die Kopfspitze für diesen Wert von k oberhalb der Wasseroberfläche liegt.

3 Analytische Geometrie

Gegeben ist eine gerade Pyramide ABCDS mit der quadratischen Grundfläche ABCD und den Eckpunkten $A(2|0|0)$, $B(2|2|0)$, und $D(0|0|0)$. Die Spitze S liegt in der

Ebene $z = 4$. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $g: x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Grundfläche sowie die Koordinaten von S. 3 BE

3.2 Die Punkte B, C und S bestimmen die Ebene E_{BCS} . Die Gerade g verläuft senkrecht zu E_{BCS} . Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E_{BCS} . 2 BE

3.3 Die Gerade g durchstößt die xy-Ebene im Punkt P. Untersuchen Sie, ob P innerhalb der Grundfläche ABCD liegt. 3 BE

3.4 Die Ebene $z = k$ schneidet die Kante BS im Punkt Q. Dabei gilt: 2 BE

$$\frac{|\overline{BQ}|}{|\overline{QS}|} = \frac{1}{3}$$

Bestimmen Sie den Wert von k.

4 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$ und $C(-4|8|5)$ gegeben.

4.1 Begründen Sie, dass die Gerade AB parallel zur xy-Ebene verläuft. 2 BE

4.2 Weisen Sie nach, dass 4 BE

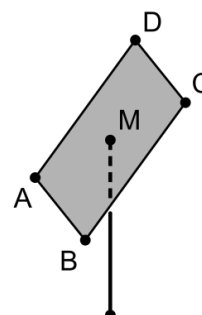
- der Punkt $M(-2|4|3)$ der Mittelpunkt der Strecke \overline{AC} ist;
- das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel hat.

4.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts D, für den das Viereck ABCD ein Rechteck ist. 1 BE

4.4 Das Rechteck ABCD liegt in einer Ebene E. 4 BE
Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $3x - y + 5z - 5 = 0$)

Solarmodule werden auf einem Trägergestell montiert, das an einem vertikal stehenden Metallrohr befestigt ist. Die gesamte Fläche der Solarmodule wird modellhaft durch das Rechteck ABCD dargestellt, der Befestigungspunkt des Metallrohrs am Trägergestell durch den Punkt M (vgl. Abbildung). Im Koordinatensystem beschreibt die xy-Ebene den horizontalen Untergrund, auf dem das Metallrohr steht; eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit.



4.5 Im Sinne eines möglichst großen Energieertrags sollte der Neigungswinkel der Modulfläche gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen. 3 BE
Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

4.6 Das Metallrohr lässt sich im Modell durch eine Strecke darstellen. 2 BE
Geben Sie eine Gleichung dieser Strecke an.

4.7 Zum betrachteten Zeitpunkt fällt das Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, senkrecht auf die Fläche der Solarmodule. Diese Fläche erzeugt auf dem horizontalen Untergrund einen rechteckigen Schatten. Begründen Sie die folgende Aussage unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze: 4 BE

Der Flächeninhalt des Rechtecks, das den Schatten im Modell darstellt, ist größer als der Flächeninhalt des Rechtecks ABCD.